

Задача 4.1. По данным 26 муниципальных районов региона о стоимости продукции сельского хозяйства (Y) и стоимости основных фондов (X) оценить параметры парных уравнений регрессии следующего вида:

- а) линейной $y_x = a_0 + a_1x$;
- б) степенной $y_x = a_0 \cdot x^{a_1}$;
- в) показательной $y_x = a_0 \cdot a_1^x$;
- г) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x$.

Таблица 4.1 – Данные о стоимости основных фондов и продукции сельского хозяйства в разрезе районов Ставропольского края в 2006 г., млн руб.

№ района	X	Y	№ района	X	Y
1	201,6	1011,3	14	655,1	1278,5
2	242,6	1490,4	15	720,1	2091,4
3	255,4	1024,5	16	741,5	2403,5
4	323,7	559,9	17	760,9	2010
5	331,9	1195,1	18	814,1	2042,3
6	384,6	1050,1	19	859,2	1607,9
7	397,7	1482,8	20	931	1683,2
8	450,7	1151,7	21	953,8	1529
9	457,6	1020,6	22	1092,6	3063,9
10	515,3	1648	23	1148,9	2048,4
11	533,8	2441,9	24	1247,5	2034,4
12	587,8	1424,6	25	1253,1	2435,9
13	614,9	1095,4	26	1873,5	3082,1

Решение:

а) *линейная регрессия* $y_x = a_0 + a_1x$.

Для определения параметров уравнения линейной парной регрессии необходимо решить следующую систему нормальных уравнений, полученную МНК:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i, \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

Таблично определим значения сумм: $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$ и $\sum x_i^2$.

**Таблица 4.2 – Расчетная таблица
для модели линейной парной регрессии**

№ района	x	y	$\sum xy$	x^2	yx
1	201,6	1011,3	203878,08	40642,56	1049,55
2	242,6	1490,4	361571,04	58854,76	1101,54
3	255,4	1024,5	261657,3	65229,16	1117,77
4	323,7	559,9	181239,63	104781,69	1204,36
5	331,9	1195,1	396653,69	110157,61	1214,76
6	384,6	1050,1	403868,46	147917,16	1281,57
7	397,7	1482,8	589709,56	158165,29	1298,18
8	450,7	1151,7	519071,19	203130,49	1365,38
9	457,6	1020,6	467026,56	209397,76	1374,13
10	515,3	1648	849214,4	265534,09	1447,29
11	533,8	2441,9	1303486,2	284942,44	1470,74
12	587,8	1424,6	837379,88	345508,84	1539,21
13	614,9	1095,4	673561,46	378102,01	1573,57
14	655,1	1278,5	837545,35	429156,01	1624,53
15	720,1	2091,4	1506017,1	518544,01	1706,95
16	741,5	2403,5	1782195,3	549822,25	1734,08
17	760,9	2010	1529409	578968,81	1758,68
18	814,1	2042,3	1662636,4	662758,81	1826,13
19	859,2	1607,9	1381507,7	738224,64	1883,31
20	931	1683,2	1567059,2	866761	1974,34
21	953,8	1529	1458360,2	909734,44	2003,25
22	1092,6	3063,9	3347617,1	1193774,8	2179,23
23	1148,9	2048,4	2353406,8	1319971,2	2250,61
24	1247,5	2034,4	2537914	1556256,3	2375,62
25	1253,1	2435,9	3052426,3	1570259,6	2382,72
26	1873,5	3082,1	5774314,4	3510002,3	3169,31
Итого	18348,9	43906,8	35838726	16776598	43906,8

В результате получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров a_0 и a_1 :

$$\begin{cases} 26a_0 + 18348,9a_1 = 43906,8, \\ 18348,9a_0 + 16776598a_1 = 35838726, \end{cases}$$

решив которую методом сложения (вычитания), получим следующие значения параметров:

$$a_0 = 793,95,$$

$$a_1 = 1,2679.$$

Таким образом, уравнение линейной парной регрессии имеет вид

$$y_x = 793,95 + 1,2679x.$$

В заключение рассчитаем теоретические значения результативной переменной (y_x), подставляя исходные значения факторной переменной в полученное уравнение регрессии. При этом сумма исходных данных по результативной переменной должна равняться сумме выровненных, как это показано в таблице 4.2:

$$\sum y_i = \sum y_{xi};$$

б) *степенная парная регрессия* $y_x = a_0 \cdot x^{a_1}$.

Таблица 4.3 – Расчетная таблица для модели степенной парной регрессии

№ района	x	y	X	Y	XY	X ²	y _x
1	201,6	1011,3	2,3045	3,0049	6,9247	5,3107	878,29
2	242,6	1490,4	2,3849	3,1733	7,5680	5,6877	967,97
3	255,4	1024,5	2,4072	3,0105	7,2470	5,7947	994,46
4	323,7	559,9	2,5101	2,7481	6,8981	6,3008	1126,26
5	331,9	1195,1	2,5210	3,0774	7,7582	6,3555	1141,15
6	384,6	1050,1	2,5850	3,0212	7,8099	6,6823	1232,98
7	397,7	1482,8	2,5996	3,1711	8,2434	6,7577	1254,86
8	450,7	1151,7	2,6539	3,0613	8,1245	7,0431	1340,07
9	457,6	1020,6	2,6605	3,0089	8,0050	7,0782	1350,80
10	515,3	1648	2,7121	3,2170	8,7246	7,3553	1437,73
11	533,8	2441,9	2,7274	3,3877	9,2396	7,4386	1464,61
12	587,8	1424,6	2,7692	3,1537	8,7333	7,6686	1540,63
13	614,9	1095,4	2,7888	3,0396	8,4768	7,7774	1577,53
14	655,1	1278,5	2,8163	3,1067	8,7494	7,9316	1630,88
15	720,1	2091,4	2,8574	3,3204	9,4878	8,1647	1713,95
16	741,5	2403,5	2,8701	3,3808	9,7034	8,2375	1740,51
17	760,9	2010	2,8813	3,3032	9,5176	8,3020	1764,28

№ района	x	y	X	Y	XY	X^2	y_x
18	814,1	2042,3	2,9107	3,3101	9,6347	8,4720	1828,02
19	859,2	1607,9	2,9341	3,2063	9,4075	8,6089	1880,52
20	931	1683,2	2,9689	3,2261	9,5782	8,8147	1961,47
21	953,8	1529	2,9795	3,1844	9,4878	8,8772	1986,55
22	1092,6	3063,9	3,0385	3,4863	10,5929	9,2322	2133,47
23	1148,9	2048,4	3,0603	3,3114	10,1339	9,3653	2190,51
24	1247,5	2034,4	3,0960	3,3084	10,2431	9,5855	2287,31
25	1253,1	2435,9	3,0980	3,3867	10,4918	9,5975	2292,69
26	1873,5	3082,1	3,2727	3,4888	11,4178	10,7103	2831,87
Итого	18348,9	43906,8	72,4079	83,0944	232,1989	203,1501	42549,39

Путем логарифмирования обеих частей исходного вида уравнения приведем его к линейному виду

$$\lg(y) = \lg(a_0 \cdot x^{a_1}),$$

отсюда

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \lg x.$$

Введем новые условные переменные, заменяя в уравнении переменные $\lg y = Y$, $\lg a_0 = A_0$, $\lg x = X$, получим однофакторное уравнение линейной регрессии

$$Y = A_0 + a_1 X,$$

параметры которого получим из следующей системы:

$$\begin{cases} nA_0 + a_1 \sum X = \sum Y, \\ A_0 \sum X + a_1 \sum X^2 = \sum YX. \end{cases}$$

Для ее решения сначала в расчетной таблице 4.3 вычислим необходимые значения сумм.

Решая систему относительно A_0 и a_1 , имеем

$$\begin{cases} 26A_0 + 72,4079a_1 = 83,0944, \\ 72,4079A_0 + 203,1501a_1 = 232,1989. \end{cases}$$

Отсюда $A_0 = 1,7334$, $a_1 = 0,5252$.

Проведем потенцирование для параметра a_0 :

$$a_0 = 10^{A_0}, \quad a_0 = 54,129.$$

Известные значения параметров подставим в уравнение степенной регрессии:

$$y_x = 54,129 \cdot x^{0,5252}$$

Определим теоретические (расчетные) значения результативного показателя в таблице 4.3;

в) *показательная регрессия* $y_x = a_0 \cdot a_1^x$.

Таблица 4.4 – Расчетная таблица для модели показательной парной регрессии

№ п/п	x	y	Y	Yx	x ²	y _x
1	201,6	1011,3	3,0049	605,7838	40642,56	1077,96
2	242,6	1490,4	3,1733	769,8433	58854,76	1111,44
3	255,4	1024,5	3,0105	768,8848	65229,16	1122,1
4	323,7	559,9	2,7481	889,5634	104781,69	1180,76
5	331,9	1195,1	3,0774	1021,3905	110157,61	1188
6	384,6	1050,1	3,0212	1161,9653	147917,16	1235,64
7	397,7	1482,8	3,1711	1261,1395	158165,29	1247,78
8	450,7	1151,7	3,0613	1379,7457	203130,49	1298,1
9	457,6	1020,6	3,0089	1376,8523	209397,76	1304,8
10	515,3	1648	3,2170	1657,6980	265534,09	1362,2
11	533,8	2441,9	3,3877	1808,3691	284942,44	1381,13
12	587,8	1424,6	3,1537	1853,7407	345508,84	1437,9
13	614,9	1095,4	3,0396	1869,0333	378102,01	1467,27
14	655,1	1278,5	3,1067	2035,1996	429156,01	1511,94
15	720,1	2091,4	3,3204	2391,0468	518544,01	1587,07
16	741,5	2403,5	3,3808	2506,8959	549822,25	1612,61
17	760,9	2010	3,3032	2513,4019	578968,81	1636,12
18	814,1	2042,3	3,3101	2694,7683	662758,81	1702,36
19	859,2	1607,9	3,2063	2754,8178	738224,64	1760,61
20	931	1683,2	3,2261	3003,5324	866761	1857,49
21	953,8	1529	3,1844	3037,2879	909734,44	1889,36
22	1092,6	3063,9	3,4863	3809,1036	1193774,8	2095,49
23	1148,9	2048,4	3,3114	3804,4844	1319971,2	2185,38
24	1247,5	2034,4	3,3084	4127,2743	1556256,3	2352,2
25	1253,1	2435,9	3,3867	4243,8230	1570259,6	2362,04
26	1873,5	3082,1	3,4888	6536,3543	3510002,3	3752,31
Итого	18348,9	43906,8	83,0944	59882	16776598	42720

Путем логарифмирования обеих частей уравнения приведем его к линейному виду

$$\lg(y) = \lg(a_0 \cdot a_1^x),$$

отсюда

$$\lg y = \lg a_0 + x \lg a_1,$$

Введем новые условные переменные: $\lg y = Y$, $\lg a_0 = A_0$, $\lg a_1 = A_1$. Получим однофакторное уравнение линейной регрессии

$$Y = A_0 + A_1 x,$$

параметры которого получим из системы, рассчитав для этого в таблице 4.4 необходимые значения сумм:

$$\begin{cases} nA_0 + A_1 \sum x = \sum Y, \\ A_0 \sum x + A_1 \sum x^2 = \sum Yx. \end{cases}$$

Решая систему относительно A_0 и A_1 имеем

$$\begin{cases} 26A_0 + 18348,9A_1 = 83,0944, \\ 18348,9A_0 + 16776598A_1 = 59882. \end{cases}$$

Отсюда $A_0 = 2,9673$, $A_1 = 0,0003039$.

Проведем потенцирование для параметров a_0 и a_1 :

$$a_0 = 10^{A_0}, \quad a_0 = 927,452,$$

$$a_1 = 10^{A_1}, \quad a_1 = 1,0007.$$

Известные значения параметров подставим в уравнение показательной регрессии:

$$y_x = 927,452 \cdot x^{1,0007}.$$

Определим теоретические (расчетные) значения результативного показателя в таблице 4.4;

г) *логарифмическая регрессия* $y_x = a_0 + a_1 \lg x$.

Таблица 4.5 – Расчетная таблица для модели логарифмической парной регрессии

№ района	x	y	X	yX	X^2	y_x
1	201,6	1011,3	2,3045	2330,5313	5,3107	742,458
2	242,6	1490,4	2,3849	3554,4412	5,6877	900,816
3	255,4	1024,5	2,4072	2466,1978	5,7947	944,798
4	323,7	559,9	2,5101	1405,4289	6,3008	1147,516
5	331,9	1195,1	2,5210	3012,8558	6,3555	1168,915

№ района	x	y	X	yX	X^2	y_x
6	384,6	1050,1	2,5850	2714,5182	6,6823	1294,975
7	397,7	1482,8	2,5996	3854,6210	6,7577	1323,626
8	450,7	1151,7	2,6539	3056,4823	7,0431	1430,639
9	457,6	1020,6	2,6605	2715,2920	7,0782	1443,636
10	515,3	1648	2,7121	4469,4751	7,3553	1545,218
11	533,8	2441,9	2,7274	6659,9857	7,4386	1575,389
12	587,8	1424,6	2,7692	3945,0445	7,6686	1657,820
13	614,9	1095,4	2,7888	3054,8564	7,7774	1696,375
14	655,1	1278,5	2,8163	3600,6493	7,9316	1750,546
15	720,1	2091,4	2,8574	5975,9513	8,1647	1831,469
16	741,5	2403,5	2,8701	6898,3122	8,2375	1856,519
17	760,9	2010	2,8813	5791,4684	8,3020	1878,611
18	814,1	2042,3	2,9107	5944,4772	8,4720	1936,420
19	859,2	1607,9	2,9341	4717,7302	8,6089	1982,542
20	931	1683,2	2,9689	4997,3361	8,8147	2051,194
21	953,8	1529	2,9795	4555,5902	8,8772	2071,890
22	1092,6	3063,9	3,0385	9309,5413	9,2322	2188,105
23	1148,9	2048,4	3,0603	6268,6821	9,3653	2231,085
24	1247,5	2034,4	3,0960	6298,5849	9,5855	2301,515
25	1253,1	2435,9	3,0980	7546,3834	9,5975	2305,346
26	1873,5	3082,1	3,2727	10086,6460	10,7103	2649,377
Итого	18348,9	43906,8	72,4079	125231,0829	203,1501	43906,8

Рассмотрим алгоритм параметризации модели логарифмической парной регрессии

$$y_x = a_0 + a_1 \lg x.$$

Введем новую условную переменную $\lg x = X$, получим однофакторное уравнение линейной регрессии

$$y_x = a_0 + a_1 X,$$

параметры которого получим из системы

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum X = \sum y, \\ a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 = \sum yX. \end{cases}$$

Решая систему относительно a_0 и a_1 , рассчитав необходимые суммы в таблице 4.5, получим

$$\begin{cases} 26a_0 + 72,4079a_1 = 43906,8, \\ 72,4079a_0 + 203,1501a_1 = 125231,0829. \end{cases}$$

Отсюда $a_0 = -3796,6$ $a_1 = 1969,67$.

Известные значения параметров подставим в уравнение логарифмической регрессии:

$$y_x = -3796,6 + 1969,67 \lg x.$$

Определим теоретические (расчетные) значения результативного показателя в таблице 4.5.

В заключение отобразим графически результаты решения задачи. Для этого в единой системе координат построим по исходным данным (x_i, y_i) поле корреляции и в соответствии с синтезированными моделями линии регрессии. Координатами для их отображения являются фактические данные по факторной переменной (x) и соответствующие значения теоретических значений результативной (y_x).

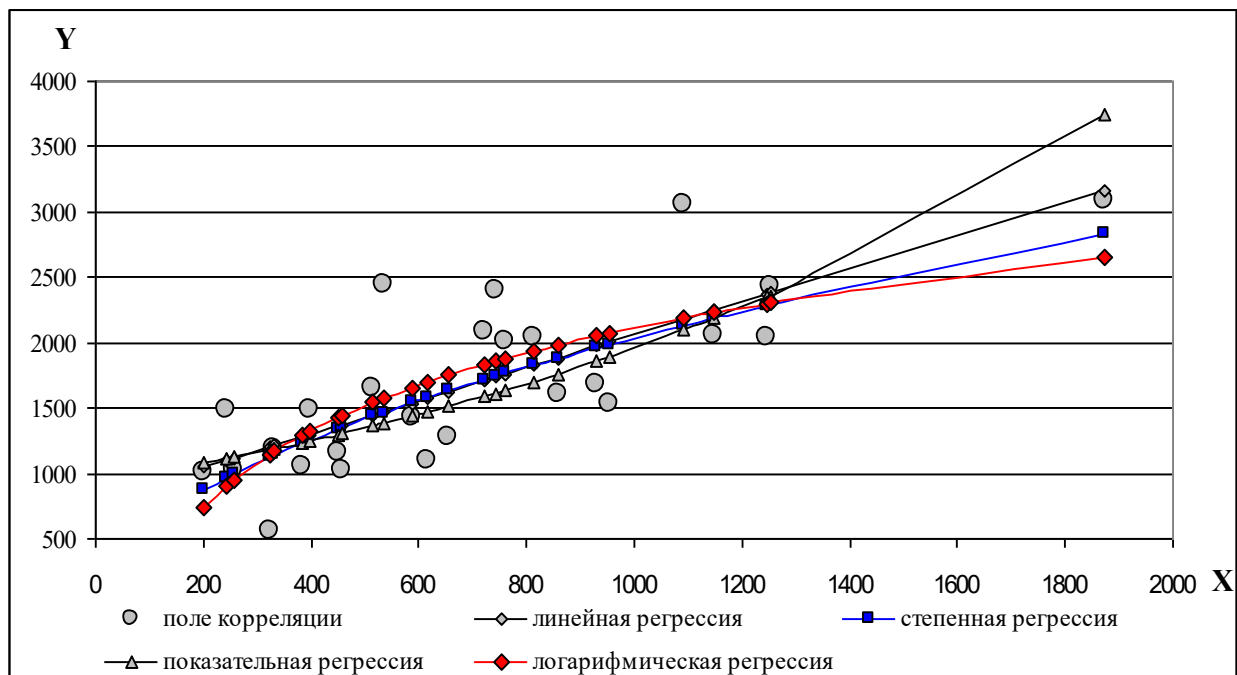


Рисунок 4.2 – Исходное поле корреляции и полученные линии регрессии

Задача 4.2. Используя данные таблицы 4.6, оцените параметры линейного уравнения множественной регрессии при помощи метода наименьших квадратов и рассчитайте теоретические уровни результативного показателя.

Таблица 4.6 – Данные о стоимости основных фондов и продукции сельского хозяйства в разрезе районов Ставропольского края в 2006 г.

№ района	Y	X ₁	X ₂	№ района	Y	X ₁	X ₂
1	1195,1	331,9	2,5	14	1278,5	655,1	3,1
2	559,9	323,7	1,2	15	1648,0	515,3	3,9
3	1607,9	859,2	3,8	16	1020,6	457,6	1,8
4	1095,4	614,9	2,5	17	1490,4	242,6	2,5
5	1424,6	587,8	2,8	18	3082,1	1873,5	3,8
6	1683,2	931,0	3,0	19	1482,8	397,7	3,4
7	1011,3	201,6	2,4	20	2010,0	760,9	2,9
8	1050,1	384,6	1,8	21	2034,4	1247,5	2,2
9	2042,3	814,1	3,6	22	2091,4	720,1	3,2
10	2403,5	741,5	2,5	23	1024,5	255,4	3,4
11	1529,0	953,8	2,4	24	2048,4	1148,9	3,5
12	2435,9	1253,1	3,1	25	1151,7	450,7	2,5
13	2441,9	533,8	2,7	26	3063,9	1092,6	1,7

Примечание: Y – продукция сельского хозяйства, млн руб.; X₁ – стоимость основных фондов, млн руб.; X₂ – приходится комбайнов на 1000 га посевов шт.

Решение: Построим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y_x = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Для оценки параметров линейной множественной регрессии, используя МНК построим следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 = \sum y, \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1x_2 = \sum yx_1, \\ a_0 \sum x_2 + a_1 \sum x_1x_2 + a_2 \sum x_2^2 = \sum yx_2. \end{cases}$$

Построим вспомогательную таблицу для определения значений неизвестных сумм.

Таблица 4.7 – Расчетная таблица для модели линейной множественной регрессии

№ п/п	Y	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₁ X ₂	YX ₁	X ₂ ²	YX ₂	Y _x
1	1195,1	331,9	2,5	110157,61	829,75	396653,69	6,25	2987,75	1209,80
2	559,9	323,7	1,2	104781,69	388,44	181239,63	1,44	671,88	1102,99
3	1607,9	859,2	3,8	738224,64	3264,96	1381507,68	14,44	6110,02	1953,03

Продолжение

№ п/п	Y	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₁ X ₂	YX ₁	X ₂ ²	YX ₂	Y _x
4	1095,4	614,9	2,5	378102,01	1537,25	673561,46	6,25	2738,5	1556,76
5	1424,6	587,8	2,8	345508,84	1645,84	837379,88	7,84	3988,88	1545,86
6	1683,2	931,0	3,0	866761,00	2793	1567059,2	9,00	5049,6	1981,51
7	1011,3	201,6	2,4	40642,56	483,84	203878,08	5,76	2427,12	1042,60
8	1050,1	384,6	1,8	147917,16	692,28	403868,46	3,24	1890,18	1222,31
9	2042,3	814,1	3,6	662758,81	2930,76	1662636,43	12,96	7352,28	1882,85
10	2403,5	741,5	2,5	549822,25	1853,75	1782195,25	6,25	6008,75	1711,97
11	1529,0	953,8	2,4	909734,44	2289,12	1458360,2	5,76	3669,6	1964,81
12	2435,9	1253,1	3,1	1570259,61	3884,61	3052426,29	9,61	7551,29	2383,86
13	2441,9	533,8	2,7	284942,44	1441,26	1303486,22	7,29	6593,13	1472,21
14	1278,5	655,1	3,1	429156,01	2030,81	837545,35	9,61	3963,35	1650,70
15	1648,0	515,3	3,9	265534,09	2009,67	849214,4	15,21	6427,2	1538,85
16	1020,6	457,6	1,8	209397,76	823,68	467026,56	3,24	1837,08	1311,81
17	1490,4	242,6	2,5	58854,76	606,5	361571,04	6,25	3726	1100,31
18	3082,1	1873,5	3,8	3510002,25	7119,3	5774314,35	14,44	11711,98	3196,57
19	1482,8	397,7	3,4	158165,29	1352,18	589709,56	11,56	5041,52	1357,45
20	2010,0	760,9	2,9	578968,81	2206,61	1529409	8,41	5829	1765,53
21	2034,4	1247,5	2,2	1556256,25	2744,5	2537914	4,84	4475,68	2310,00
22	2091,4	720,1	3,2	518544,01	2304,32	1506017,14	10,24	6692,48	1737,83
23	1024,5	255,4	3,4	65229,16	868,36	261657,3	11,56	3483,3	1182,99
24	2048,4	1148,9	3,5	1319971,21	4021,15	2353406,76	12,25	7169,4	2285,88
25	1151,7	450,7	2,5	203130,49	1126,75	519071,19	6,25	2879,25	1355,45
26	3063,9	1092,6	1,7	1193774,76	1857,42	3347617,14	2,89	5208,63	2082,88
Σ	43906,8	18348,9	72,2	16776597,91	53106,11	35838726,26	212,84	125483,85	43906,80

В результате получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров:

$$\begin{cases} 26a_0 + 18348,9a_1 + 72,2a_2 = 43906,8, \\ 18348,9a_0 + 16776597,91a_1 + 53106,11a_2 = 35838726,26, \\ 72,2a_0 + 53106,11a_1 + 212,84a_2 = 125483,85. \end{cases}$$

Решим данную систему методом определителей, для этого найдем сначала общий определитель системы из следующей матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 26 & 18348,9 & 72,2 \\ 18348,9 & 16776597,91 & 53106,11 \\ 72,2 & 53106,11 & 212,84 \end{vmatrix}.$$

Для нахождения определителя представленной матрицы можно использовать соответствующую функцию в электронных таблицах MS Excel, как это показано на рисунке 4.3.

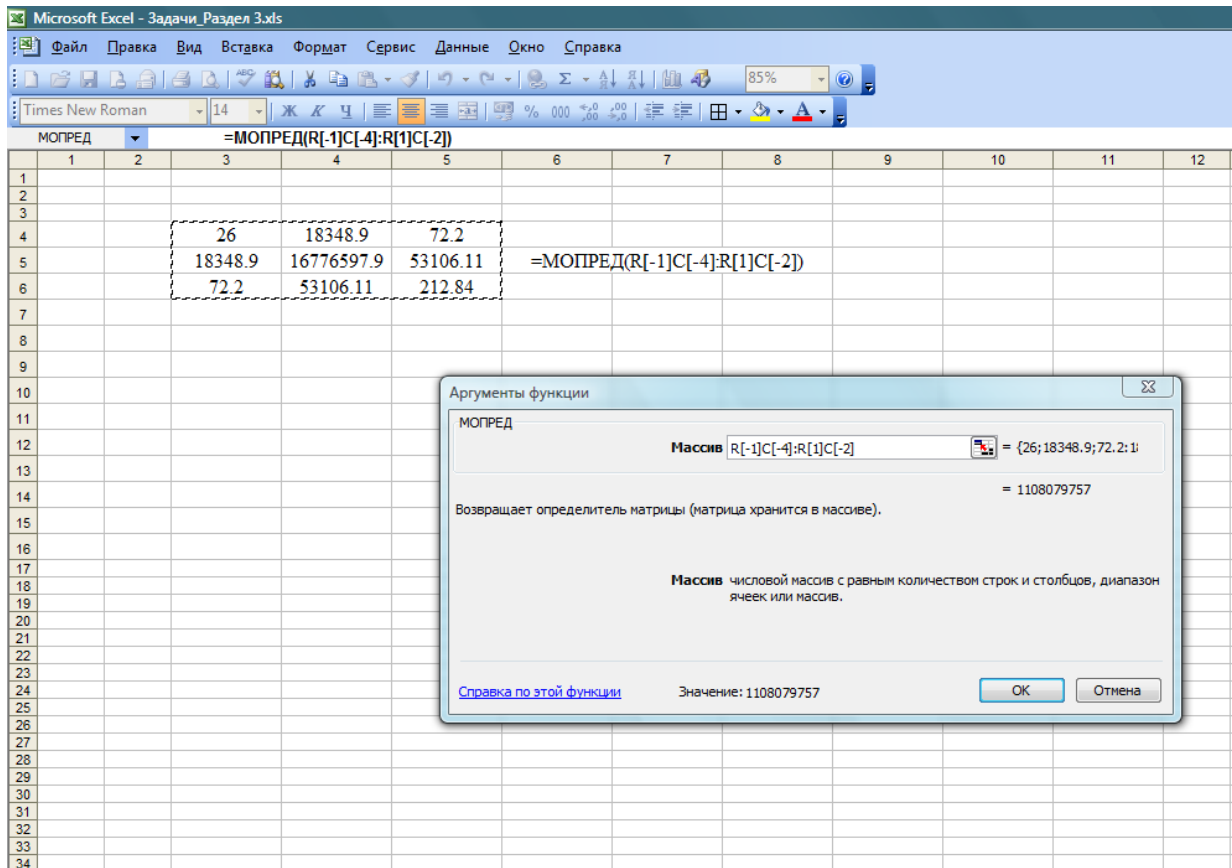


Рисунок 4.3 – Нахождение определителя матрицы с помощью функции МОПРЕД в электронных таблицах MS Excel

Таким образом, общий определитель системы составил $\Delta = 1108079757$.

Аналогичным образом рассчитаем частные определители для параметров a_0 , a_1 и a_2 , заменив соответствующие столбцы матрицы на свободные члены правой части уравнений системы:

$$\Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} 43906,8 & 18348,9 & 72,2 \\ 35838726,26 & 16776597,91 & 53106,11 \\ 125483,85 & 53106,11 & 212,84 \end{vmatrix} = 683477648076,839,$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 26 & 43906,8 & 72,2 \\ 18348,9 & 35838726,26 & 53106,11 \\ 72,2 & 125483,85 & 212,84 \end{vmatrix} = 1358519847,19,$$

$$\Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} 26 & 18348,9 & 43906,8 \\ 18348,9 & 16776597,91 & 35838726,26 \\ 72,2 & 53106,11 & 125483,85 \end{vmatrix} = 82471919451,1.$$

Теперь найдем значения параметров:

$$a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta} = \frac{683477648076,839}{1108079757} = 616,813;$$

$$a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta} = \frac{1358519847,19}{1108079757} = 1,226;$$

$$a_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta} = \frac{82471919451,1}{1108079757} = 74,428.$$

Таким образом, полученное уравнение линейной множественной регрессии имеет вид

$$y_x = 661,813 + 1,226x_1 + 74,428x_2.$$

В заключение по полученному уравнению рассчитаем теоретические (расчетные) значения результативного показателя, подставляя в него исходные значения факторных переменных x_1 и x_2 . Вычисленные значения приведены в таблице 4.7.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.3. Для линейного парного уравнения регрессии при двенадцати наблюдениях известны следующие значения: $\sum x = 15$, $\sum x^2 = 85$, $\sum yx = 125$, $\sum y = 58$, $\sum y^2 = 120$. Определите параметры уравнения регрессии.

Задача 4.4. Для парного уравнения регрессии, синтезированного на основе равносторонней гиперболы, при десяти наблюдениях известны следующие значения: $\sum \frac{1}{x} = 15$, $\sum \frac{1}{x^2} = 85$, $\sum \frac{y}{x} = 125$, $\sum y = 58$, $\sum \frac{1}{y^2} = 120$. Определите параметры уравнения регрессии.

Задача 4.5. Для уравнения линейной парной регрессии при пятнадцати наблюдениях известны следующие значения: $\sum x = 15$, $\sum x^2 = 85$, $\sum yx = 125$, $\sum y = 58$, $\sum y^2 = 120$. Рассчитайте параметры уравнения регрессии методом определителей.

Задача 4.6. Для парного уравнения регрессии, аппроксимированного на основе степенной функции, для девяти наблюдений известны следующие значения сумм: $\sum \lg x = 15$, $\sum (\lg x)^2 = 85$, $\sum \lg y \cdot \lg x = 125$, $\sum \lg y = 58$, $\sum (\lg y)^2 = 120$. Определите параметры уравнения регрессии.

Задача 4.7. Для парного уравнения регрессии, аппроксимированного на основе показательной функции, для десяти наблюдений известны следующие значения: $\sum x = 132$, $\sum x^2 = 1183$, $\sum x \cdot \lg y = 1152$, $\sum \lg y = 58,3$, $\sum (\lg y)^2 = 151,43$. Определите параметры уравнения регрессии.

Задача 4.8. Для парного уравнения регрессии, аппроксимированного в соответствии с логарифмической функцией, для восемнадцати наблюдений известны следующие значения: $\sum \lg x = 35,6$, $\sum (\lg x)^2 = 85,2$, $\sum y \cdot \lg x = 323$, $\sum y = 58$, $\sum y^2 = 120$. Найдите параметры уравнения регрессии методом определителей.

Задача 4.9. По данным об индексе физического объема инвестиций (Y) и среднесложившихся цен на зерно (X) оценить параметры уравнений регрессии следующего вида:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x$;

б) степенной $y_x = a_0 \cdot x^{a_1}$.

Таблица 4.8 – Данные об индексе физического объема инвестиций и стоимости сельскохозяйственной продукции в 2006 г. в разрезе районов Ставропольского края

№ района	Индекс физического объема инвестиций, в % к предыдущему году	Среднесложившиеся цены на зерно, реализованное по всем каналам, руб/ц
	Y	X
1	141,9	320,7
2	64,1	282,1
3	89,3	318,5
4	49,6	268,5
5	116,3	282,8
6	110,0	295,6
7	66,9	339,9
8	138,6	262,8
9	159,5	276,6
10	131,0	321,5
11	129,0	290
12	87,5	313,3
13	84,3	259,4
14	116,1	282,6

Задача 4.10. По данным о прибыли сельхозпредприятий (Y) и соотношении производственной себестоимости зерна к средней по краю (X) оценить параметры уравнений регрессии следующего вида:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x$;

б) равносторонней гиперболы $y_x = a_0 + \frac{a_1}{x}$.

Таблица 4.9 – Данные о соотношении производственной себестоимости зерна к средней по краю и прибыли (убытка) сельхозпредприятий в 2006 г. в разрезе районов края

№ района	Соотношение производственной себестоимости 1 ц зерна к средней по краю, %	Прибыль (убыток) сельхозпредприятий, млн руб.
	<i>X</i>	<i>Y</i>
1	116,38	-12,6
2	181,36	-9,9
3	108,19	-14,8
4	117,23	85,7
5	92,09	95,6
6	107,06	14,6
7	125,99	15,5
8	100,00	32,2
9	100,85	13,5
10	148,31	66,4
11	94,35	8,8
12	94,92	32,2

Задача 4.11. По данным об объемах сельскохозяйственной продукции (*Y*) и среднегодовой стоимости основных фондов (*X*) оценить параметры уравнений регрессии следующего вида:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x$;

б) показательной $y_x = a_0 \cdot a_1^x$.

Таблица 4.10 – Данные о среднегодовой стоимости основных фондов и стоимости сельскохозяйственной продукции СХТП в 2006 г. в разрезе районов Ставропольского края

№ района	Среднегодовая стоимость основных фондов СХТП, млн руб.	Объем сельскохозяйственной продукции СХТП, млн руб.
	<i>X</i>	<i>Y</i>
1	718,8	141,9
2	1216,8	64,1
3	864,2	145,7
4	580,4	89,3
5	549,8	49,6
6	1250,0	116,3
7	1579,3	110,0
8	2052,6	66,9

9	894,0	138,6
10	886,7	159,5
11	495,6	129,0
12	321,0	162,6
13	1377,7	87,5
14	520,4	84,3

Задача 4.12. По данным об объемах производства мяса всех видов (Y) и заготовленных кормах в сельхозпредприятиях (X) оценить параметры уравнений регрессии следующего вида:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x$;

б) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x$;

в) показательной $y_x = a_0 \cdot a_1^x$;

г) равносторонней гиперболы $y_x = a_0 + \frac{a_1}{x}$.

Таблица 4.11 – Данные о производстве мяса всех видов и заготовке кормов в сельхозпредприятиях в разрезе районов Ставропольского края в 2006 г.

№ района	Производство мяса всех видов во всех категориях хозяйств, тонн (в живом весе)	Заготовлено кормов в сельхозпредприятиях в расчете на одну условную голову скота, ц корм. ед.
	Y	X
1	4038,0	22,0
2	5791,0	25,4
3	6580,0	22,8
4	4078,0	29,1
5	9322,0	24,5
6	5748,0	23,4
7	13195,0	23,9
8	7786,0	32,7
9	3586,0	37,1
10	6510,0	26,0
11	10307,0	24,5
12	8718,0	27,4
13	7105,0	45,0

14	9526,0	24,2
15	4844,0	22,0
16	11685,0	22,8

Задача 4.13. По данным об обеспеченности населения мясными продуктами (Y) и объемах производства всех видов мяса в сельхозпредприятиях (X) оценить параметры уравнений регрессии следующего вида:

- а) линейной $y_x = a_0 + a_1x$;
- б) показательной $y_x = a_0 \cdot a_1^x$;
- в) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x$;
- г) степенной $y_x = a_0 \cdot x^{a_1}$.

Таблица 4.12 – Данные об обеспеченности мясными продуктами населения региона и производстве мяса всех видов в разрезе районов Ставропольского края в 2006 г.

№ района	Коэффициент обеспеченности мясными продуктами населения	Производство мяса всех видов во всех категориях хозяйств, т (в живом весе)
	Y	X
1	0,654	5411,0
2	0,660	4038,0
3	0,658	5647,0
4	0,663	4253,0
5	0,664	4078,0
6	0,670	5748,0
7	0,665	7786,0
8	0,674	5052,0
9	0,665	9472,0
10	0,664	3586,0
11	0,668	6510,0
12	0,672	7105,0
13	0,663	9526,0
14	0,666	4844,0
15	0,662	5362,0

Задача 4.14. Используя данные таблицы 4.13, оцените параметры линейного уравнения множественной регрессии при помощи метода наименьших квадратов и рассчитайте теоретические уровни результативного показателя.

Таблица 4.13 – Исходные данные о производстве мясной продукции в разрезе районов Ставропольского края в 2006 г.

№ района	Производство мяса всех видов во всех категориях хозяйств, т (в живом весе)	Заготовлено кормов в сельхозпредприятиях в расчете на одну условную голову скота, ц корм. ед.	Падеж крупного рогатого скота в сельхозпредприятиях, %
	Y	X_1	X_2
1	5411,0	16,5	0,5
2	4038,0	22,0	3,2
3	8283,0	12,8	1,3
4	5647,0	14,8	2,1
5	4253,0	14,4	1,1
6	5791,0	25,4	2,0

Продолжение

№ района	Производство мяса всех видов во всех категориях хозяйств, т (в живом весе)	Заготовлено кормов в сельхозпредприятиях в расчете на одну условную голову скота, ц корм. ед.	Падеж крупного рогатого скота в сельхозпредприятиях, %
	Y	X_1	X_2
7	6580,0	22,8	2,3
8	4078,0	29,1	0,5
9	9322,0	24,5	2,6
10	7419,0	16,1	0,7
11	5748,0	23,4	1,2
12	13195,0	23,9	2,7
13	7786,0	32,7	2,9
14	5052,0	15,6	1,3
15	9472,0	7,4	0,5
16	3586,0	37,1	2,9
17	6510,0	26,0	2,9
18	10307,0	24,5	0,6

Задача 4.15. Используя данные таблицы 4.14, оцените при помощи метода наименьших квадратов параметры следующего уравнения нелинейной множественной регрессии:

$$y_x = a_0 \cdot a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2},$$

рассчитайте теоретические уровни результативного показателя.

Таблица 4.14 – Данные о прибыли сельхозпредприятий, среднемесячной заработной плате и соотношении среднесложившейся цены зерна к средней по краю в 2006 г. в разрезе районов Ставропольского края

№ района	Прибыль (убыток) сельхозпредприятий, млн руб.	Среднемесячная заработная плата работающих, руб.	Соотношение среднесложившейся цены 1 ц зерна к средней по краю
	Y	X_1	X_2
1	12,6	3685	1,026
2	9,9	5460	1,095
3	42,3	2803	0,835
4	69,6	3164	0,883
5	51,1	3892	0,963

Продолжение

№ района	Прибыль (убыток) сельхозпредприятий, млн руб.	Среднемесячная заработная плата работающих, руб.	Соотношение среднесложившейся цены 1 ц зерна к средней по краю
	Y	X_1	X_2
6	132,6	2831	0,967
7	116,9	4831	1,087
8	14,8	3932	0,916
9	85,7	5584	1,066
10	95,6	3749	0,965
11	14,6	5074	1,009
12	141,3	4644	1,160
13	154,7	3861	1,157
14	111,5	3530	0,897
15	116,4	3395	0,944

Задача 4.16. По данным таблицы 4.15 определите параметры следующих уравнений множественной регрессии:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$;

б) степенной $y_x = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot x_3^{a_3}$,

рассчитайте теоретические уровни результативного показателя.

Таблица 4.15 – Данные к задаче в разрезе районов края за 2006 г.

№ района	Коэффициент обеспеченности мясными продуктами населения	Доля животноводства в общем объеме произведенной с.-х. продукции, %	Производство мяса всех видов во всех категориях хозяйств, тонн (в живом весе)	Численность свиней во всех категориях хозяйств на начало года, тыс. гол.
	Y	X_1	X_2	X_3
1	0,654	36,08	5411,0	14,0
2	0,660	62,39	4038,0	4,2
3	0,662	48,38	8283,0	30,2
4	0,658	30,32	5647,0	9,6
5	0,663	33,43	4253,0	11,8
6	0,664	28,22	5791,0	15,8
7	0,715	35,82	6580,0	21,3
8	0,664	39,68	4078,0	9,5
9	0,665	34,24	9322,0	23,1

Продолжение

№ района	Коэффициент обеспеченности мясными продуктами населения	Доля животноводства в общем объеме произведенной с.-х. продукции, %	Производство мяса всех видов во всех категориях хозяйств, тонн (в живом весе)	Численность свиней во всех категориях хозяйств на начало года, тыс. гол.
	Y	X_1	X_2	X_3
10	0,661	37,99	7419,0	19,8
11	0,670	37,84	5748,0	30,8
12	0,667	40,99	13195,0	29,9
13	0,665	23,41	7786,0	30,7
14	0,674	32,02	5052,0	18,0
15	0,665	42,02	9472,0	10,6
16	0,664	32,45	3586,0	5,3
17	0,668	33,71	6510,0	2,4
18	0,660	23,79	10307,0	39,4
19	0,670	32,96	6239,0	39,0
20	0,663	30,93	8718,0	41,3

Задача 4.17. По данным таблицы 4.16 определите параметры следующих уравнений множественной регрессии:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$;

б) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x_1 + a_2 \lg x_2 + a_3 \lg x_3$,

рассчитайте теоретические уровни результативного показателя.

Таблица 4.16 – Данные к задаче в разрезе районов края за 2006 г.

№ района	Объем сельскохозяйственной продукции СХТП, млн руб.	Среднегодовая стоимость основных фондов СХТП, млн руб.	Численность работающих в сельскохозяйственном производстве, тыс. чел.	Среднее значение температуры воздуха, °С
	Y	X_1	X_2	X_3
1	200,0	646,3	2,0	10,4
2	141,9	718,8	0,5	10,5
3	220,0	1177,6	4,7	11,2
4	280,0	776,1	2,5	11,3
5	64,1	1216,8	2,2	11
6	145,7	864,2	3,3	11,2
7	89,3	580,4	3,4	11
8	49,6	549,8	1,2	10,2

Продолжение

№ района	Объем сельскохозяйственной продукции СХТП, млн руб.	Среднегодовая стоимость основных фондов СХТП, млн руб.	Численность работающих в сельскохозяйственном производстве, тыс. чел.	Среднее значение температуры воздуха, °С
	Y	X_1	X_2	X_3
9	127,2	10761,8	2,7	10,2
10	116,3	1250,0	4,3	11,4
11	110,0	1579,3	1,6	11
12	66,9	2052,6	4,5	10,5
13	270,0	944,4	3,2	11,2
14	138,6	894,0	1,9	11,7
15	159,5	886,7	2,5	11,3
16	340,0	13770,5	0,9	11,2
17	165,4	9624,9	1,8	11,7
18	131,0	3589,9	4,2	11,2

Задача 4.18. По данным таблицы 4.17 определите параметры следующих уравнений множественной регрессии:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$;

б) степенной $y_x = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot x_3^{a_3} \cdot x_4^{a_4}$;

в) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x_1 + a_2 \lg x_2 + a_3 \lg x_3 + a_4 \lg x_4$,

рассчитайте теоретические уровни результативного показателя.

Таблица 4.17 – Данные к задаче в разрезе районов края за 2006 г.

№ района	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	188,2	3685	2907,1	17,5	7,6
2	189,9	5460	3006,3	18,4	7,9
3	190,4	2803	3133,0	20,1	10,8
4	189,3	3164	2878,7	10,4	5,6
5	190,8	3892	2943,5	22,0	5,2
6	191,1	2831	2998,6	16,9	4,6
7	205,8	4831	3062,9	16,6	3,9
8	190,9	3932	2904,9	12,8	4,4
9	191,2	5584	3228,2	24,9	5,1
10	190,2	3749	2727,3	32,7	12,7
11	192,6	5074	3061,4	17,7	4,3

Продолжение

№ района	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
12	192,0	4644	2967,2	57,5	9,8
13	191,3	3861	2977,4	18,8	4,3
14	193,8	3530	2710,6	14,0	6,9
15	191,4	3395	2966,1	19,6	13,6
16	191,1	4713	3162,8	14,4	4,5
17	192,1	5620	2860,3	17,0	10,3
18	189,7	4003	2978,0	30,4	5,8
19	192,6	3475	2879,6	16,5	4,3
20	190,6	4317	2922,5	21,9	6,7
21	193,4	5260	2986,2	30,9	6,6
22	190,8	3832	2990,6	25,9	5,1
23	191,5	3163	2804,7	14,8	4,1
24	189,3	4275	2996,1	29,2	5
25	190,4	3139	2882,2	12,7	7
26	197,6	5186	2933,1	24,9	6,8

Примечание: Y – фактическое потребление молочных продуктов на 1 человека в год, кг; X_1 – среднемесячная заработная плата работающих, руб.; X_2 – средний размер месячных пенсий всех пенсионеров, руб.; X_3 – производство молока (заданной жирности), тыс. т; X_4 – численность коров во всех категориях хозяйств на начало года, тыс. гол.